Práctica 3. Modelo de Cass-Koopmans-Ramsey

Pregunta 1. Resuelva el equilibrio competitivo del modelo de Ramsey introduciendo progreso tecnológico en términos de las variables expresadas en unidades eficientes. Para ello, suponga ahora que la función de producción es del siguiente tipo: $Y_t = F(K_t,\ A_t L_t)$, donde $\dot{A}_t / A_t = g_A$ y $\dot{L}_t / L_t = n$, con rendimientos constantes a escala en ambos inputs. Calcule también el estado estacionario en unidades eficiente y, por último, estudie el efecto de un aumento en la tasa de crecimiento de la tecnología.

Pregunta 2. Suponga el siguiente modelo:

Problema de los consumidores:

$$\underset{\{c_t\}}{Max} \int_0^\infty e^{-\theta t} U(c_t) dt$$

$$\text{sujeto a: } (1+\tau_c)c_t + \dot{a}_t = (1-\tau_w)w_t + \big((1-\tau_a)r_t - n\big)a_t + v_t$$

$$a_0, \text{ dado}$$

Problema de la empresa:

$$\underset{\{K_t, L_t\}}{Max}\ (1-\tau_f)\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - \delta K_t\right] - r_t K_t$$

$$sujeto\ a: \ F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Problema del gobierno: satisface su restricción presupuestaria en cada periodo:

En términos per-cápita: $g_t + v_t = \tau_w w_t + \tau_a r_t a_t + \tau_c c_t + \tau_f \left[k_t^\alpha - w_t - \delta k_t\right]$

Nótese que este problema puede resumirse en las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau_a)(1-\tau_f)\left(\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta\right) - (\theta + n)\right]$$

$$c_t + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t + g_t = k_t^\alpha$$

$$g_t + v_t = \left[(1-\alpha)\tau_w + \alpha\left(\tau_a(1-\tau_f) + \tau_f\right)\right]k_t^\alpha - \left(\tau_a(1-\tau_f) + \tau_f\right)\delta k_t + \tau_c c_t$$

a) Pruebe que si el gobierno fija que tanto el gasto público como las transferencias son un porcentaje constante del output (es decir, $g_t = \mu_g y_t,\ v_t = \mu_v y_t$), el estado estacionario puede resumirse con las siguientes ecuaciones:

$$k^{*}=\left[\frac{(1-\tau_a)(1-\tau_f)\alpha}{n+\theta+(1-\tau_a)(1-\tau_f)\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},\ y^{*}=\left[\frac{(1-\tau_a)(1-\tau_f)\alpha}{n+\theta+(1-\tau_a)(1-\tau_f)\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\frac{c^{*}}{y^{*}}=1-\mu_g-(n+\delta)\frac{(1-\tau_a)(1-\tau_f)\alpha}{n+\theta+(1-\tau_a)(1-\tau_f)\delta},$$

$$\frac{g^{*}}{y^{*}}=\mu_g=\tilde{\tau}-\hat{\tau}\delta\frac{(1-\tau_a)(1-\tau_f)\alpha}{n+\theta+(1-\tau_a)(1-\tau_f)\delta}+\tau_c\frac{c^{*}}{y^{*}}-\mu_v,$$

$$\textit{donde}\ \ \tilde{\tau}\equiv(1-\alpha)\tau_w+\alpha\left(\tau_a(1-\tau_f)+\tau_f\right),\ \hat{\tau}\equiv\tau_a(1-\tau_f)+\tau_f.$$

b) Sean los siguientes valores paramétricos:

$$\alpha=0.36,\ \theta=0.02,\ \delta=0.1,\ \sigma=2,\ n=0.01,$$
$$\tau_c=0.1,\ \tau_a=0.3,\ \tau_f=0.15,\ \tau_w=0.2,\ \mu_v=0.05.$$

Calcule los valores de estado estacionario. ¿Qué porcentaje sobre el output supone el gasto público?

c) Con los valores paramétricos anteriores, estudie la siguiente política fiscal: "si el gobierno quiere incrementar el gasto en un punto porcentual, ¿qué figura impositiva debería variar? ¿por qué?"

d) Con los valores paramétricos anteriores, estudie la siguiente política fiscal: "si el gobierno quiere reducir 5 puntos el tipo impositivo sobre las rentas del capital y mantener el mismo porcentaje de gasto sobre output obtenido en la pregunta c), con qué figura impositiva debería compensar la pérdida de ingresos? ¿por qué?".

Pregunta 3. Demuestre que la tasa de ahorro en el modelo de Ramsey no será constante en general fuera del estado estacionario.

Pista:

Pruebe primero que para el modelo de Ramsey visto en clase la tasa de ahorro de estado estacionario es $s^* = \dfrac{\alpha(\delta+n)}{n+\delta+\theta}$.

Si definimos la tasa de ahorro como $s_t = 1 - \dfrac{c_t}{y_t} = 1 - z_t$, podemos estudiar la dinámica de s_t a través de la dinámica de z_t, simplemente teniendo en cuenta que $\dot{s}_t = -\dot{z}_t$.

Nótese que $\dfrac{\dot{z}_t}{z_t} = \dfrac{\dot{c}_t}{c_t} - \dfrac{\dot{y}_t}{y_t} = \dfrac{\dot{c}_t}{c_t} - \alpha\dfrac{\dot{k}_t}{k_t} =$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[\alpha k_t^{\alpha-1} - (n+\delta+\theta)\right] - \alpha\left[k_t^{\alpha-1} - \frac{c_t}{k_t} - (n+\delta)\right]$$

$$= \alpha k_t^{\alpha-1}\left[z_t - \left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right] + (n+\delta+\theta)\left(s^* - \frac{1}{\sigma}\right).$$

Por tanto, podemos analizar la dinámica de z_t usando la ecuación anterior junto con la de recursos: $\dfrac{\dot{k}_t}{k_t} = k_t^{\alpha-1} - \dfrac{c_t}{k_t} - (n+\delta) = (1-z_t)k_t^{\alpha-1} - (n+\delta)$.

Utilice un diagrama de fase en las variables z_t y k_t, para estudiar la dinámica de z_t a partir de las ecuaciones siguientes, teniendo en cuenta si $s^* = \dfrac{1}{\sigma}$, $s^* > \dfrac{1}{\sigma}$, ó $s^* < \dfrac{1}{\sigma}$,:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{z}_t}{z_t} = \alpha k_t^{\alpha-1}\left[z_t - \left(1-\dfrac{1}{\sigma}\right)\right] + (n+\delta+\theta)\left(s^* - \dfrac{1}{\sigma}\right) \\ \dfrac{\dot{k}_t}{k_t} = (1-z_t)k_t^{\alpha-1} - (n+\delta) \end{cases}$$